ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN VĂN TẤN

NGHIỆM YẾU CỦA BÀI TOÁN BIÊN DIRICHLET CHỨA TOÁN TỬ LAPLACE PHÂN THỨ

Ngành: Toán giải tích
Mã số: 8.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: TS. NGUYỄN VĂN THÌN

THÁI NGUYÊN - 2019

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan luận văn **"Nghiệm yếu của bài toán biên Dirichlet chứa toán tử Laplace phân thứ"** là công trình nghiên cứu khoa học độc lập của riêng tôi dưới sự hướng dẫn khoa học của **TS. Nguyễn Văn Thìn**. Các nội dung nghiên cứu, kết quả trong luận văn này là trung thực và chưa từng công bố dưới bất kỳ hình thức nào trước đây.

Ngoài ra, trong luận văn tôi còn sử dụng một số kết quả, nhận xét của các tác giả khác đều có trích dẫn và chú thích nguồn gốc.

Nếu phát hiện bất kỳ sự gian lận nào tôi xin hoàn toàn chịu trách nhiệm về nội dung luận văn của mình.

Thái Nguyên, ngày 16 tháng 05 năm 2019

Tác giả

Nguyễn Văn Tấn

Lời cảm ơn

Để hoàn thành đề tài luận văn và kết thúc khóa học, với tình cảm chân thành, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới trường Đại học Sư phạm Thái Nguyên đã tạo điều kiện cho tôi có môi trường học tập tốt trong suốt thời gian tôi học tập, nghiên cứu tại trường.

Tôi xin gửi lời cảm ơn tới **TS. Nguyễn Văn Thìn** đã giúp đỡ tôi trong suốt quá trình nghiên cứu và trực tiếp hướng dẫn tôi hoàn thành đề tài luận văn tốt nghiệp này. Đồng thời, tôi xin bày tỏ lòng cảm ơn tới thầy cô trong Khoa Toán, bạn bè đã giúp đỡ, tạo điều kiện cho tôi trong suốt quá trình học tập và hoàn thiện luận văn tốt nghiệp này.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày 16 tháng 05 năm 2019

Tác giả

Nguyễn Văn Tấn

Mục lục

Lời cam đoan **i**

Lời cảm ơn **ii**

Lời mở đầu **1**

1 Không gian Sobolev thứ **3**

1.1 Biến đổi Fourier trong không gian các hàm tăng chậm . . . 3

1.2 Không gian Sobolev thứ 4

1.2.1 Tính chất phép nhúng 6

1.2.2 Không gian Sobolev $H^s(\Omega)$ 10

1.3 Toán tử Laplace phân thứ 10

1.3.1 Hằng số C(n, s): Một vài tính chất 13

1.3.2 Toán tử Laplace phân thứ qua biến đổi Fourier . . . 17

2 Nghiệm yếu của bài toán biên Dirichlet chứa toán tử Laplace phân thứ **20**

2.1 Nghiệm Mountain pass cho bài toán biên Dirichlet chứa toán Laplace phân thứ 20

2.2 Sự tồn tại nhiều nghiệm cho bài toán Laplace phân thứ với độ tăng tới hạn 42

Kết luận **64**

Tài liệu tham khảo **65**

Lời mở đầu

Trong thời gian gần đây, các nhà toán học dành sự quan tâm vào nghiên cứu các toán tử không địa phương loại elliptic (bao gồm toán tử Laplacian phân thứ) trong cả nghiên cứu toán học thuần túy và toán ứng dụng trong thế giới thực. Các lớp toán tử này phát sinh khá tự nhiên trong nhiều bối cảnh khác nhau như: Tối ưu hóa, toán tài chính, mặt cực tiểu, định luận bảo toàn, cơ học lượng tử, khoa học vật liệu, sóng nước, phản ứng hóa học của chất lỏng, động lực học dân số, động lực học về chất lỏng địa vật lý. Toán tử Laplacian phân thứ (fractional Laplacian) cũng cung cấp một mô hình đơn giản để mô tả các quá trình Lévy trong lý thuyết xác suất. Toán tử Laplace phân thứ là một dạng mở rộng của toán tử Laplace, được định nghĩa thông qua tích phân kỳ dị như sau: Với $s \in (0,1)$ và $u \in L^2(\mathbb{R})^n, n > 2s$ hàm khi đó toán tử Laplace phân thứ $(-\Delta)^s u$ được định nghĩa bởi

$$(-\Delta)^s u(x) = C(n,s) \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,\varepsilon)} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{n+2s}} dy,$$

trong đó

$$C(n,s) = 1 / \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1-\cos\zeta_1}{|\zeta|^{n+2s}} d\zeta, \zeta = (\zeta_1, \zeta'), \zeta' \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Khi u là hàm trơn vô hạn với giá compact, ta có $\lim\limits_{s\to 1}(\Delta)^s u = -\Delta u$. Hơn nữa, ta có

$$-(-\Delta)^s u(x) = C(n,s) \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,\varepsilon)} \frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{n+2s}} dy, x \in \mathbb{R}^n.$$

Ngoài định nghĩa trên, toán tử Laplace phân thứ $(-\Delta)^s$ còn được định nghĩa thông qua phép biến đổi Fourier [6], s-mở rộng điều hòa được giới thiệu bởi

Caffarelli-Silvestre [3]. Như vậy khái niệm toán tử Laplace phân thứ là một khái niệm toán học giàu cách tiếp cận. Do đó, các bài toán nghiên cứu về toán tử Laplace phân thứ đã nhận được sự quan tâm lớn của các nhà toán học trên thế giới trong thời gian gần đây. Mục đích của luận văn là nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán biên Dirichlet cho toán tử Laplace phân thứ có dạng

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u & = f(x,u) \text{ trong } \Omega \\ u & = 0 \text{ trong } \mathbb{R}^n \backslash \Omega, \end{cases}$$

trong đó Ω là miền bị chặn với biên Lipschitz. Hàm phi tuyến có độ tăng dưới đại lượng tới hạn Sobolev hoặc chứa số hạng $|u|^{2_s^*-2} u$ trong đó $2_s^* = \dfrac{2n}{n-2s}$ là số mũ tới hạn Sobolev. Trong trường hợp bài toán chứa số mũ tới hạn, khó khăn gặp phải là phép nhúng $X_0 \to L^{2_s^*}(\Omega)$ liên tục, không compact.

Chương 1

Không gian Sobolev thứ

1.1 Biến đổi Fourier trong không gian các hàm tăng chậm

Xét không gian Schwartz $\mathcal{S}$ các hàm $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tăng chậm có tôpô xác định bởi $\{p_j\}_{j\in\mathbb{N}}$:

$$p_j(\varphi) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|)^j \sum_{|\alpha|\le j} |D^\alpha\varphi(x)|,$$

trong đó $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Nghĩa là, $\mathcal{S}$ chứa các hàm φ thỏa mãn

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha D^\beta\varphi(x)\right| < +\infty, \text{ với mọi } \alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^n.$$

Tôpô lồi địa phương tự nhiên trên $\mathcal{S}$ có tính chất: dãy $\{\varphi\}_{i\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến 0 trong $\mathcal{S}$ nếu và chỉ nếu $\lim\limits_{j\to+\infty} x^\alpha D^\beta\varphi_j(x) = 0$ với mọi $\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^n$.
Ta định nghĩa

$$\mathcal{F}\varphi(x) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\cdot x}\varphi(\xi)d\xi,$$

là biến đổi Fourier của hàm $\varphi\in\mathcal{S}$ và biến đổi Fourier ngược xác định bởi

$$\mathcal{F}^{-1}\varphi(x) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi\cdot}\varphi(\xi)d\xi, \tag{1.1}$$

cả hai đều là ánh xạ tuyến tính liên tục từ $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vào chính nó. Hơn nữa, vì

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\varphi = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\varphi = \varphi,$$

là một phép đẳng cấu và phép đồng phôi của $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ lên $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Đặt $\mathcal{S}'$ là tôpô đối ngẫu của $\mathcal{S}$. Nếu $T \in \mathcal{S}'$, thì

$$\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle := \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{S},$$

trong đó $\langle ., . \rangle$ là tích đối ngẫu thông thường giữa $\mathcal{S}$ và $\mathcal{S}'$. Ta có

$$u \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ nếu và chỉ nếu } \mathcal{F}u \in L^2(\mathbb{R}^n) \tag{1.2}$$

và

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\mathcal{F}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \forall u \in L^2(\mathbb{R}^n). \tag{1.3}$$

Công thức (1.3) gọi là công thức Paranchval-Plancherel.

1.2 Không gian Sobolev thứ

Giả sử Ω là tập không trơn, mở trong không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ và $p \in [1, +\infty)$. Cho $s > 0$ bất kỳ chúng ta định nghĩa không gian Sobolev thứ $W^{s,p}(\Omega)$ như sau.

Nếu $s \geq 1$ là số nguyên dương, thì $W^{s,p}(\Omega)$ là không gian Sobolev cổ điển với chuẩn

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \sum_{0 \leq |\alpha| \leq s} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}, \forall u \in W^{s,p}(\Omega),$$

ở đây và về sau ta hiểu $\|.\|_{L^p(\Omega)}$ là chuẩn thông thường trong $L^p(\Omega)$, và D^α là α-đạo hàm riêng. Phần này tập trung vào không gian Sobolev thứ với $s \notin \mathbb{N}$.

Nếu $s \in (0, 1)$ cố định, không gian Sobolev $W^{s,p}(\Omega)$ được định nghĩa:

$$W^{s,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) : \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{n/p+s}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \right\}.$$

Nó được trang bị chuẩn

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx + \int_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy \right)^{1/p}, \tag{1.4}$$

trong đó

$$[u]_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\int_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy \right)^{1/p} \tag{1.5}$$

là nửa chuẩn Gagliardo của u.

Nếu $s > 1$ và $s \notin \mathbb{N}$, ta có $s = m + \sigma$, trong đó $m \in \mathbb{N}$ và $\sigma \in (0,1)$. Chúng ta có định nghĩa $W^{s,p}(\Omega)$ như sau:

$W^{s,p}(\Omega) := \{u \in W^{m,p}(\Omega) : D^\alpha u \in W^{\sigma,p}(\Omega)$ với bất kì α sao cho $|\alpha| = m\}$.

Và được trang bị chuẩn

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\|u\|^p_{W^{m,p}(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|^p_{W^{\sigma,p}(\Omega)} \right)^{1/p}, \forall u \in W^{s,p}(\Omega).$$

Do đó, không gian $W^{s,p}(\Omega)$ được xác định và là không gian Banach với mọi $s > 0$ và

$$\overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^n)}^{\|\cdot\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}} = W^{s,p}(\mathbb{R}^n);$$

nghĩa là, không gian $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ trù mật trong $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$. Nếu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ thì không gian $C_0^\infty(\Omega)$ không trù mật trong $W^{s,p}(\Omega)$. Do đó, $W_0^{s,p}(\Omega)$ là bao đóng của $C_0^\infty(\Omega)$ đối với chuẩn $\|.\|_{W^{s,p}(\Omega)}$; tức là

$$W_0^{s,p}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{s,p}(\Omega)}};$$

Ta có thể xây dựng $W^{s,p}(\Omega)$ khi $s < 0$. Thật vậy, với $s < 0$ và $p \in (0, +\infty)$, ta định nghĩa

$$W^{s,p}(\Omega) := (W_0^{-s,q}(\Omega))';$$

nghĩa là, $W^{s,p}(\Omega)$ là không gian đối ngẫu của $W_0^{-s,q}(\Omega)$, trong đó

$$1/p + 1/q = 1.$$

1.2.1 Tính chất phép nhúng

Một số kết quả cơ bản của phép nhúng được phát biểu như sau:

Mệnh đề 1.2.1. *Giả sử $p \in [1, +\infty)$ và tập mở Ω trong $\mathbb{R}^n$. Khi đó, các khẳng định sau là đúng:*

(a) *Nếu $0 < s \leq s' < 1$, thì phép nhúng $W^{s',p}(\Omega) \hookrightarrow W^{s,p}(\Omega)$ là liên tục. Do đó, tồn tại hằng số $C_1(n, s, p) \geq 1$ sao cho*

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C_1(n, s, p)\|u\|_{W^{s',p}(\Omega)}, \forall u \in W^{s',p}(\Omega).$$

(b) *Nếu $0 < s < 1$ và Ω là lớp $C^{0,1}$ và biên $\partial\Omega$ bị chặn, thì phép nhúng $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{s,p}(\Omega)$ là liên tục. Do đó, tồn tại hằng số $C_2(n, s, p) \geq 1$ sao cho $\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C_2(n, s, p)\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$.*

(c) *Nếu $s' \geq s > 1$ và Ω là lớp $C^{0,1}$, thì phép nhúng $W^{s',p}(\Omega) \hookrightarrow W^{s,p}(\Omega)$ là liên tục.*

Định nghĩa 1.2.2. Với mọi $s \in (0, 1)$ và $p \in [1, +\infty)$, tập mở $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là miền mở rộng cho $W^{s,p}$ nếu tồn tại hằng số dương $C := C(n, p, s, \Omega)$ sao cho với mọi hàm $u \in W^{s,p}(\Omega)$, tồn tại $\mathcal{E}_u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ sao cho $\mathcal{E}_u(x) = u(x)$,

$$\|\mathcal{E}_u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}, \forall x \in \Omega.$$

Lưu ý mọi tập mở của lớp $C^{0,1}$ với biên bị chặn là miền mở rộng cho $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$.

Định lý 1.2.3. *Cho $s \in (0, 1)$ và $p \in [1, +\infty)$ sao cho $sp < n$. Khi đó, tồn tại hằng số dương $C := C(n, p, s)$ sao cho*

$$\|u\|^p_{L^{p^*_s}(\mathbb{R}^n)} \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+ps}} dxdy, \forall u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n),$$